Técnicas de cálculo de Primitivas

El problema del cálculo de primitivas consiste en tratar de expresar la *"primitiva trivial"* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ por medio de funciones elementales que permitan una evaluación efectiva de la integral.

Es frecuente que una función elemental no tenga primitivas que puedan expresarse por medio de funciones elementales.

Esto ocurre, por ejemplo, con las funciones e^{-x^2}, $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, $\operatorname{sen}(x^2)$, $\sqrt{x^3+1}$, y muchas más.

En tales casos la forma más sencilla de representar una primitiva de f es justamente mediante la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ y, para obtener valores concretos de dicha función hay que recurrir a métodos numéricos de cálculo de integrales.

En lo que sigue vamos a considerar algunos tipos de funciones elementales cuyas primitivas también pueden expresarse por medio de funciones elementales y pueden calcularse con procedimientos más o menos sistemáticos.

Observaciones sobre la notación y terminología usuales

Para representar una primitiva de una función f, se usa la notación $\int f(x)dx$.

Esta notación es algo imprecisa y solamente se justifica por la comodidad en los cálculos que proporciona.

La integral de una función en un intervalo, $\int_a^b f(x)dx$, se llama a veces *"integral definida"* de f (y es un número), y al símbolo $\int f(x)dx$ se le llama *"integral indefinida"* o, simplemente, *"integral"* de f (y representa una primitiva cualquiera de f). Aunque esto puede ser confuso, no olvides que, *cuando hablamos de calcular la integral $\int f(x)dx$ lo que realmente queremos decir es que queremos calcular una primitiva de f.*

Como ya sabes, en los símbolos $\int f(x)dx$ o $\int_a^b f(x)dx$ la letra "x" puede sustituirse por cualquier otra y el símbolo "dx" (que se lee *"diferencial x"*) sirve para indicar la variable de integración. Esto es muy útil si la función f contiene parámetros. Por ejemplo, son muy diferentes las integrales $\int x^y dx$ y $\int x^y dy$.

Te recuerdo también que, si $y = y(x)$ es una función de x, suele usarse la notación $dy = y'dx$ que es útil para mecanizar algunos cálculos pero que no tiene ningún significado especial: es una forma de indicar que y' es la derivada de y respecto a x.

Finalmente, si φ es una función, se usa la notación $\varphi(x)\Big|_{x=c}^{x=d}$ o sencillamente, $\varphi(x)\Big|_c^d$ para indicar el número $\varphi(d) - \varphi(c)$, y usaremos la notación $\varphi(x)\Big|_{x\to a}^{x\to b}$ para indicar $\lim_{x\to b}\varphi(x) - \lim_{x\to a}\varphi(x)$. Esta notación es cómoda cuando estudiamos convergencia de integrales.

Integración por partes

Si u y v son funciones con derivada continua en un intervalo, por la regla de derivación para un producto sabemos que la función uv es una primitiva de la función $u'v+v'u$, es decir, $\int(u'(x)v(x)+u(x)v'(x))dx = u(x)\,v(x)$. Lo que suele escribirse en la forma:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Por supuesto, esta igualdad podemos usarla para calcular integrales definidas:

$$\int_c^d u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_{x=c}^{x=d} - \int_c^d v(x)u'(x)dx \tag{1}$$

Para e caso de integrales impropias, *si existen los límites* $\lim\limits_{x\to a} u(x)v(x)$ y $\lim\limits_{x\to b} u(x)v(x)$, entonces la igualdad (1) nos dice que las integrales $\int_a^b v(x)u'(x)dx$ y $\int_a^b u(x)v'(x)dx$ ambas convergen o ninguna converge y, cuando son convergentes se verifica que:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_{x\to a}^{x\to b} - \int_a^b v(x)u'(x)dx \tag{2}$$

Veamos algunas situaciones en las que este método puede aplicarse con éxito.

- Cuando la integral $\int v(x)u'(x)dx$ es inmediata. Por ejemplo, para calcular una integral $\int f(x)dx$ en la que la derivada de $f(x)$ es más sencilla que la propia función, como es el caso de $\log x$, $\operatorname{arc\,sen} x$, $\operatorname{arc\,tg} x$.

- **Ejemplo 1.**

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx &= \begin{bmatrix} u = \operatorname{arc\,tg} x \to du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv = dx \to v = x \end{bmatrix} = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = \\ &= = x \operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2}\log(1+x^2)\end{aligned}$$

- Cuando la integral $\int v(x)u'(x)dx$ es del mismo tipo que la integral de partida, pero más sencilla, de manera que reiterando el proceso se llega a una integral inmediata. Este es el caso cuando $f(x)$ es de la forma $P(x)\,\mathrm{e}^{ax}$, $P(x)\operatorname{sen}(ax)$, $P(x)\cos(ax)$, donde $P(x)$ es una función polinómica. En todos los casos se elige $u(x) = P(x)$, y $v'(x) = \mathrm{e}^{ax}$, $v'(x) = \operatorname{sen}(ax)$, $v'(x) = \cos(ax)$.

- **Ejemplo 2.**

$$\int P(x)\,\mathrm{e}^{ax}\,dx = \left[\begin{array}{c} u = P(x) \longrightarrow du = P'(x)dx \\ dv = \mathrm{e}^{ax}\,dx \longrightarrow v = \dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{a} \end{array}\right] = P(x)\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a} - \frac{1}{a}\int P'(x)e^{ax}dx$$

La última integral es *del mismo tipo que la primera pero con el grado del polinomio rebajado en una unidad*. El proceso se repite tantas veces como sea necesario.

- Cuando la integral $\int v(x)u'(x)dx$ es parecida a la de partida, de forma que al volver a aplicar el proceso la integral de partida se repite y es posible despejarla de la igualdad obtenida.

- **Ejemplo 3.**

$$\int \cos(\log x)dx = \left[\begin{array}{l} u = \cos(\log x) \longrightarrow du = -\dfrac{1}{x}\operatorname{sen}(\log x)dx \\ dv = dx \longrightarrow v = x \end{array}\right] =$$

$$x\cos(\log x) + \int \operatorname{sen}(\log x)dx = \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{sen}(\log x) \longrightarrow du = \dfrac{1}{x}\cos(\log x)dx \\ dv = dx \longrightarrow v = x \end{array}\right]$$

$$= x\cos(\log x) + x\operatorname{sen}(\log x) - \int \cos(\log x)dx$$

deducimos que $\displaystyle\int \cos(\log x)dx = \frac{x}{2}\big(\cos(\log x) + \operatorname{sen}(\log x)\big).$

Integración por recurrencia

La técnica de integración por partes permite en algunas ocasiones relacionar una integral de la forma $I_n = \int f(x,n)dx$ en la que interviene un **parámetro** n (con frecuencia un número natural) con otra del mismo tipo en la que el parámetro ha disminuido en una o en dos unidades. Las expresiones así obtenidas se llaman **fórmulas de reducción o de recurrencia** y permiten el cálculo efectivo de la integral cuando se particularizan valores del parámetro. Los siguientes ejemplos son ilustrativos de esta forma de proceder.

- **Ejemplo 4.**

$$\int (\log x)^n dx = \begin{bmatrix} u = (\log x)^n \rightarrow du = n\dfrac{(\log x)^{n-1}}{x}dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{bmatrix} = x(\log x)^n - n\int (\log x)^{n-1}dx$$

- **Ejemplo 5.**

$$I_n = \int x^n \mathrm{e}^{ax} dx = \begin{bmatrix} u = x^n \rightarrow du = nx^{n-1} \\ dv = \mathrm{e}^{ax}dx \rightarrow v = \dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{a}dx \end{bmatrix} = \frac{1}{a}\left(x^n \mathrm{e}^{ax} - nI_{n-1}\right)$$

Integración por sustitución o cambio de variable

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\begin{array}{l} x = g(t),\ dx = g'(t)dt \\ a = g(c),\ b = g(d) \end{array}\right] = \int_c^d f(g(t))g'(t)\,dt$$

Para el caso de integrales indefinidas este proceso de sustitución se representa de forma menos precisa y se escribe simplemente

$$\int f(x)\,dx = \left[\begin{array}{c} x = g(t) \\ dx = g'(t)dt \end{array}\right] = \int f(g(t))g'(t)\,dt$$

Puede ocurrir que al hacer un cambio de variable en una *"integral corriente"* obtengamos una *"integral impropia"*. No hay que preocuparse porque **para estudiar la convergencia de una integral pueden hacerse cambios de variable *biyectivos*: ello no altera la eventual convergencia de la integral ni su valor**.

• **Ejemplo 7.** Con frecuencia se hacen cambios de variable para quitar radicales.

$$\int_{2/\sqrt{3}}^{2} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx = \left[\begin{array}{c} x = 2\operatorname{tg} t,\ dx = \dfrac{2}{\cos^2 t} \\ 2/\sqrt{3} = 2\operatorname{tg}(\pi/6),\ 2 = 2\operatorname{tg}(\pi/4) \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}\,dt = \frac{1}{4}\left[\frac{-1}{\operatorname{sen} t}\right]_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

• **Ejemplo 8.** Un cambio de variable en una integral impropia. Consideremos la integral:

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx$$

Suponemos que $a<b$. El cambio que hacemos consiste en llevar el intervalo $]-1,1[$ al $]a,b[$ por una biyección del tipo $g(t)=\alpha t+\beta$. Como $g(-1)=a$, $g(1)=b$ tenemos $\alpha=(b-a)/2$, $\beta=(b+a)/2$. Con ello:

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx = \left[\begin{array}{c} x = g(t),\ dx = \dfrac{b-a}{2} \\ a = g(-1),\ b = g(1) \end{array}\right] = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi$$

Integración de funciones racionales

Dadas dos funciones polinómicas $P(x)$ y $Q(x)$, queremos calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$.

Si el grado de P es mayor o igual que el de Q, podemos dividir los dos polinomios obteniendo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{G(x)}{Q(x)},$$

donde $H(x)$ y $G(x)$ son polinomios y el grado de G es menor que el grado de Q. Por tanto, *supondremos siempre que el grado de* P *es menor que el grado de* Q.

Supondremos también que el coeficiente líder del polinomio Q *es* 1.

La técnica para calcular la integral consiste en descomponer la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en otras más sencillas llamadas *"fracciones simples"*. Estudiaremos dos formas de hacerlo: el método de los coeficientes indeterminados y una variante del mismo conocida como Método de Hermite.

Método de los coeficientes indeterminados

■ Paso 1. Descomposición del denominador en factores irreducibles

Descomponemos el denominador, $Q(x)$, como producto de factores de grado 1 y factores de grado 2 irreducibles:

$$Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1} \cdots (x-a_n)^{\alpha_n} (x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m} \tag{3}$$

Observaciones

• Esto se dice muy pronto, pero puede ser muy difícil de hacer si no imposible. Afortunadamente, en los casos prácticos esta descomposición o se conoce o es muy fácil de realizar.

• En la descomposición (3) cada a_j es una raíz real de orden α_j del polinomio Q, y los factores cuadráticos del tipo $(x^2+b_jx+c_j)^{\beta_j}$ corresponden a raíces complejas conjugadas de orden β_j. Tales factores cuadráticos son irreducibles, es decir, su discriminante es negativo o, lo que es igual, $x^2+b_jx+c_j>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

■ **Paso 2.**

Método de los coeficientes indeterminados

Escribimos el cociente $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de fracciones de la siguiente forma:

• Por cada raíz real a_j de orden α_j escribimos α_j fracciones cuyos numeradores son constantes A_{k_j} que hay que determinar, y los denominadores son de la forma $(x-a_j)^{k_j}$ donde k_j toma valores de 1 hasta α_j.

• Por cada factor cuadrático irreducible $(x^2+b_jx+c_j)^{\beta_j}$ escribimos β_j fracciones cuyos numeradores son de la forma $B_{k_j}x+C_{k_j}$ siendo B_{k_j} y C_{k_j} constantes que hay que determinar, y los denominadores son de la forma $(x^2+b_jx+c_j)^{k_j}$ donde k_j toma valores de 1 hasta β_j.

• La descomposición es de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k_j=1}^{\alpha_j}\frac{A_{k_j}}{(x-a_j)^{k_j}}\right] + \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{k_j=1}^{\beta_j}\frac{B_{k_j}x+C_{k_j}}{(x^2+b_jx+c_j)^{k_j}}\right] \tag{4}$$

Método de Hermite

Escribimos el cociente $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ de la siguiente forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n} + \frac{B_1 x + C_1}{x^2+b_1 x + c_1} + \cdots + \frac{B_m x + C_m}{x^2 + b_m x + c_m} +$$
$$+ \frac{d}{dx}\left(\frac{F(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1 - 1}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n - 1}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1 - 1}\cdots(x^2+b_m x+c_m)^{\beta_m - 1}} \right)$$

donde $A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_m,C_1,\ldots,C_m$ son coeficientes que tenemos que determinar y, en la fracción que aparece con una derivada, $F(x)$ es un polinomio genérico de grado uno menos que el denominador. En resumen, se trata de escribir $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de fracciones simples, una por cada factor, más la derivada de un cociente que tiene por denominador lo que queda de $Q(x)$. Observa que en ambos métodos hay que calcular tantos coeficientes como el grado de Q.

■ Paso 3. Determinación de los coeficientes

Tanto en un caso como en otro, se reducen todas las fracciones a común denominador (que será $Q(x)$), y se iguala a $P(x)$ al numerador resultante. Esto nos producirá un sistema de ecuaciones cuya resolución nos dará el valor de todos los coeficientes. Naturalmente, en el método de Hermite hay que efectuar la derivada antes de reducir a común denominador.

Observaciones

- En ambos métodos tenemos que calcular el mismo número de coeficientes pero en el método de Hermite la obtención del sistema de ecuaciones es un poco más trabajosa debido a la presencia de la derivada.
- El método de Hermite es interesante de aplicar cuando hay factores cuadráticos de orden elevado (raíces imaginarias múltiples).

■ Paso 4. Integración de las fracciones simples

En el método de Hermite, una vez escrita la función racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ de la forma anterior, es fácil calcular su integral:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{A_1}{x-a_1}\,dx + \cdots + \int \frac{B_1x+C_1}{x^2+b_1x+c_1}\,dx + \cdots +$$
$$+ \frac{F(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n-1}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1-1}\cdots(x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m-1}}$$

Sólo nos queda saber calcular las integrales que hemos dejado pendientes:

- $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\log|x-a|.$

- $\displaystyle\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}\,dx$. Siempre se puede escribir $x^2+bx+c=(x-d)^2+k^2$, con lo que descomponemos nuestra integral en dos:

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}\,dx &= \int \frac{Bx+C}{(x-d)^2+k^2}\,dx = \int \frac{B(x-d)+C+Bd}{(x-d)^2+k^2}\,dx = \\ &= \int \frac{B(x-d)}{(x-d)^2+k^2}\,dx + \int \frac{C+Bd}{(x-d)^2+k^2}\,dx = \\ &= \frac{B}{2}\log\left((x-d)^2+k^2\right) + (C+Bd)\int \frac{dx}{(x-d)^2+k^2}\end{aligned}$$

y la última integral es inmediata (del tipo arcotangente) si hacemos el cambio de variable $t=\dfrac{x-d}{k}$.

En el método de los coeficientes indeterminados aparecen también, cuando hay raíces múltiples, otros dos tipos de fracciones elementales:

- Fracciones del tipo $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ donde $k \in \mathbb{N}$ y $k \geqslant 2$, correspondientes a raíces reales múltiples, las cuales no ofrecen dificultad pues
- $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = -\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}$.
- Fracciones del tipo $\dfrac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k}$ donde $k \in \mathbb{N}$ y $k \geqslant 2$, correspondientes a raíces imaginarias múltiples, la integración de las cuales ofrece bastante dificultad a partir de $k \geqslant 3$.

• **Ejemplo 9.** Calcular $\int \frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,dx$. Como hay raíces imaginarias múltiples aplicaremos el método de Hermite.

$$\frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2(x^2+1)}\right)$$

Realizando la derivada y reduciendo a común denominador, obtenemos un sistema de ecuaciones cuya solución es

$$a=0, \qquad b=5/2, \qquad c=0, \qquad d=1, \qquad A=5, \qquad B=-5, \qquad C=0;$$

por lo tanto

$$\int \frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,dx = \frac{(5/2)x^2+1}{x^2(x^2+1)} + 5\log x - \frac{5}{2}\log(x^2+1).$$

• **Ejemplo 10.** Calcular la integral $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{x+1}{x(x+1)(x^2+1)}\,dx$. Aplicaremos el método de los coeficientes indeterminados.

$$\frac{x+1}{x(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Reduciendo a común denominador obtenemos:

$$\frac{x+1}{x(x+1)(x^2+1)} = \frac{-A+(A+B-D)x+(-A-C+D)x^2+(A+B+C)x^3}{x(x+1)(x^2+1)}$$

Identificando coeficientes resulta el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ -A-C+D &= 0 \\ A+B-D &= 1 \\ -A &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 & B=1 \\ C=0 & D=-1 \end{cases}$$

Deducimos que:

$$\int_{2}^{t} \frac{x+1}{x(x+1)(x^2+1)}\,dx = \int_{2}^{t} \frac{dx}{x-1} - \int_{2}^{t} \frac{dx}{x} - \int_{2}^{t} \frac{dx}{x^2+1} = \log\left(2\frac{t-1}{t}\right) - \operatorname{arc\,tg} t + \operatorname{arc\,tg} 2$$

Por tanto:

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{x+1}{x(x+1)(x^2+1)}\,dx = \log 2 - \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 2$$

Integración por racionalización Acabamos de ver que la primitiva de una función racional siempre puede expresarse mediante funciones elementales.

Nos vamos a ocupar ahora de algunos tipos de funciones no racionales cuyas integrales se pueden transformar, por medio de un cambio de variable, en integrales de funciones racionales. Se dice entonces que la integral de partida se ha *racionalizado* y esta técnica se conoce como *"integración por racionalización"*.

En lo que sigue, representaremos por $R = R(x,y)$ una función racional de dos variables, es decir, un cociente de funciones polinómicas de dos variables. Te recuerdo que una función polinómica de dos variables es una función de la forma $P(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} c_{ij}x^i y^j$.

Integración de funciones del tipo $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$

Las integrales del tipo $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx$ donde $R = R(x, y)$ una función racional de dos variables, se racionalizan con el cambio de variable $t = \operatorname{tg}(x/2)$. Con lo que

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

Con ello resulta:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx = \Big[t = \operatorname{tg}(x/2)\Big] = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

- **Ejemplo 11.**

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x} = \int \frac{\cos x \, dx}{\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x} = \left[\operatorname{tg} x/2 = t \right] = \cdots = \int \frac{t^2 - 1}{2t^3} \, dt$$

$$= \frac{1}{4t^2} + \frac{\log t}{2} = \frac{1}{4 \operatorname{tg}^2(x/2)} + \frac{1}{2} \log |\operatorname{tg}(x/2)|.$$

Casos particulares

• Cuando $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ se dice que *"R es par en seno y coseno"*. En este caso es preferible el cambio $\operatorname{tg} x = t$. Con lo que

$$\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

En el caso particular de tratarse de una integral del tipo

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \, dx$$

con n y m números enteros *pares*, es preferible simplificar la integral usando las identidades

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

• Cuando $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ se dice que *"R es impar en seno"* y el cambio $\cos x = t$ suele ser eficaz.

• Cuando $R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ se dice que *"R es impar en coseno"* y el cambio $\operatorname{sen} x = t$ suele ser eficaz.

- **Ejemplo 12.** Calcular $\mathbf{I} = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx$. Tenemos:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I} &= \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x\, dx = \int \cos^2 x\, dx - \int \cos^4 x\, dx = \\
&= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx - \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \\
&= \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx = \\
&= \frac{x+\operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx - \frac{1}{4}\frac{1+\cos 4x}{2}\, dx \\
&= \frac{x+\operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} = \frac{1}{8}\left(x - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4}\right)
\end{aligned}
$$

- **Ejemplo 13.**

$$\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{sen} x \\ dt = \cos x\,dx \end{array}\right] = \int \frac{1-t^2}{t^2}\,dt$$

$$= \frac{-1}{t} - t = \frac{-1}{\operatorname{sen} t} - \operatorname{sen} t.$$

• **Ejemplo 14.** Sea $\mathbf{I} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx$. Se trata de una función par en seno y en coseno. Haciendo $t = \operatorname{tg} x$, obtenemos:

$$\mathbf{I} = \int \frac{t^2}{(t+1)(t^2+1)^2}\,dt$$

Aplicando el método de Hermite escribimos:

$$\frac{t^2}{(t+1)(t^2+1)^2} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2+1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{\alpha t+\beta}{t^2+1}\right)$$

Haciendo la derivada y reduciendo a común denominador obtenemos:

$$\frac{t^2}{(t+1)(t^2+1)^2} =$$

$$= \frac{A+C+\beta+(B+C-2\alpha+\beta)t+(2A+B+C-2\alpha-\beta)t^2+(B+C-\beta)t^3+(A+B)t^4}{(t+1)(t^2+1)^2}$$

Identificando coeficientes resulta el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} A+C+\beta &= 0 \\ B+C-2\alpha+\beta &= 0 \\ 2A+B+C-2\alpha-\beta &= 1 \\ B+C-\beta &= 0 \\ A+B &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/4 & B = -1/4 \\ C = 0 & D = -1 \\ \alpha = -1/4 & \beta = -1/4 \end{cases}$$

Deducimos que:

$$\mathbf{I} = \frac{1}{4}\log|t+1| - \frac{1}{8}\log(t^2+1) - \frac{1}{4}\frac{1+t}{1+t^2} = \frac{1}{4}\log|\operatorname{sen}x+\cos x| - \frac{1}{4}\cos x(\operatorname{sen}x+\cos x)$$

- Cuando la función $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ sea de la forma

$$\operatorname{sen}(ax+b)\operatorname{sen}(cx+d), \quad \operatorname{sen}(ax+b)\cos(cx+d), \quad \cos(ax+b)\cos(cx+d)$$

puede resolverse la integral usando las fórmulas:

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2}, \quad \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{2}$$

- **Ejemplo 15.**

$$\int \operatorname{sen}(3x)\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(5x)\,dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} x\,dx = -\frac{1}{10}\cos(5x) - \frac{1}{2}\cos x$$

• Integrales de la forma $\int \operatorname{tg}^n x\,dx$, $\int \operatorname{cotg}^n x\,dx$. Se reducen a una con grado inferior separando $\operatorname{tg}^2 x$ o $\operatorname{cotg}^2 x$ y sustituyéndola por $\sec^2 x - 1$ o $\operatorname{cosec}^2 x - 1$.

• Ejemplo 16.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{tg}^5 x\,dx &= \int \operatorname{tg}^3 x \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \operatorname{tg}^3 x(\sec^2 x - 1)\,dx = \int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x\,dx - \int \operatorname{tg}^3 x\,dx \\
&= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}^2 x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg} x(\sec^2 x - 1)\,dx \\
&= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg} x \sec^2 x\,dx + \int \operatorname{tg} x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \log|\cos x|
\end{aligned}$$

Integrales del tipo $\int R\left(x,\,[L(x)]^r,[L(x)]^s,\ldots\right)dx$ donde

$$L(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\quad a,b,c,d\in\mathbb{R}\quad ad-bc\neq 0\quad r,s,\ldots\in\mathbb{Q}$$

Se racionalizan con el cambio $t^q=L(x)$ donde q es el mínimo común denominador de las fracciones $r,s,\ldots$. Pues entonces tenemos que

$$x=\frac{dt^q-b}{a-ct^q}=r(t)$$

y la integral se transforma en

$$\int R(r(t),t^{rq},t^{sq},\ldots)r'(t)\,dt$$

en la que el integrando es una función racional de t.

• **Ejemplo 17.** Sea $\mathbf{I} = \int \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/3} \frac{1}{1+x}\,dx$. El cambio de variable $\frac{x+1}{x-1} = t^3$ racionaliza la integral pues se tiene que $x = \frac{t^3+1}{t^3-1}$, con lo que:

$$\mathbf{I} = -3\int \frac{1}{t^3-1}\,dt = \int \left(\frac{t+2}{t^2+t+1} - \frac{1}{t-1}\right) dt = \frac{1}{2}\log\left(\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}\right) + \sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$$

donde $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.

Integrales del tipo $\int R(\mathrm{e}^x)dx$. Se racionalizan con el cambio $x = \log t$. Un caso particular de este es el de las integrales de la forma $\int R(\cosh x, \operatorname{senh} x)dx$ que también admiten un tratamiento parecido al de las trigonométricas.

• **Ejemplo 18.** Sea $\mathbf{I} = \int \frac{2}{\operatorname{senh} x + \operatorname{tgh} x} dx$. Desarrolla los cálculos para comprobar que

$$\mathbf{I} = [x = \log t] = \int \frac{2(1+t^2)}{(t-1)(1+t)^3} dt = \log\left(\operatorname{tgh}\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \frac{1}{1+\cosh x}$$

Por otra parte, como la función $\frac{2}{\operatorname{senh} x + \operatorname{tgh} x}$ es impar en $\operatorname{senh} x$, también podemos proceder como sigue

$$\mathbf{I} = [t = \cosh x] =$$

$$= \int \frac{2t}{(-1+t)(1+t)^2} dt = -\frac{1}{1+\cosh x} + \frac{1}{2}\log(-1+\cosh x) - \frac{1}{2}\log(1+\cosh x)$$

Por supuesto, puedes comprobar que las dos primitivas encontradas son de hecho iguales.

Integración de funciones del tipo $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$

Una integral de la forma $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ puede racionalizarse por medio de las sustituciones siguientes.

- Si el trinomio ax^2+bx+c tiene dos raíces reales α y β, distintas entonces

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = [a(x-\alpha)(x-\beta)]^{1/2} = (x-\alpha)\left[\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}\right]^{1/2}$$

Donde, por comodidad, hemos supuesto que $x-\alpha>0$. Deducimos que la sustitución

$$\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha} = t^2 \;\; (t>0), \quad x = \frac{\alpha t^2-\beta\alpha}{t^2-a} = r(t)$$

transforma la integral en $\int R\big(r(t), (r(t)-\alpha)t\big)r'(t)dt$ donde el integrando es una función racional de t.

• Si el trinomio ax^2+bx+c no tiene raíces reales, entonces debe ser $ax^2+bx+c>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$, en particular $c>0$. La sustitución:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\,x+\sqrt{c}, \quad x=\frac{b-2t\sqrt{c}}{t^2-a}=g(t)$$

transforma la integral en $\int R\big(g(t),t\,g(t)+\sqrt{c}\big)g'(t)dt$ donde el integrando es una función racional de t.

Las sustituciones anteriores se conocen como *sustituciones de Euler*.

• **Ejemplo 20.** Cálcular $\int \frac{x}{(7x-10-x^2)^{3/2}}\,dx$. Observa que, si $R(x,y)=\frac{x}{y^3}$, la integral que nos piden es $\int R(x,\sqrt{7x-10-x^2})dx$ del tipo que acabamos de considerar. Como $7x-10-x^2=(x-2)(5-x)$, tenemos que

$$\int \frac{x}{(7x-10-x^2)^{3/2}}\,dx=\left[x=\frac{5+2t^2}{1+t^2}\right]=-\frac{6}{27}\int \frac{5+2t^2}{t^2}\,dt=-\frac{2}{9}\left(-\frac{5}{t}+2t\right)$$

donde $t=\frac{(7x-10-x^2)^{1/2}}{x-2}$.

• **Ejemplo 21.** $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$. Haciendo $\sqrt{1+x+x^2} = x+t$, es decir, $x = \frac{t^2-1}{1-2t}$ tenemos

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}\,dx = \left[x = \frac{t^2-1}{1-2t}\right] = \int \frac{2}{t^2-2t}\,dt =$$

$$= \int \left(\frac{-1}{t} + \frac{1}{t-2}\right) dt = -\log t + \log|t-2|$$

donde $t = \sqrt{1+x+x^2} - x$.

También es posible transformar una integral del tipo $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ en otra de la forma $\int F(\operatorname{sen} x, \cos x)dx$ donde F es una función racional de dos variables las cuales ya hemos estudiado. Para ello se sigue el siguiente procedimiento.

• Con un primer cambio de variable, de la forma $x = \alpha t + \beta$ que después explicaremos, se transforma la integral $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ en otra de alguna de las formas

$$\textbf{a)} \int G(t, \sqrt{t^2-1})dt\,, \quad \textbf{b)} \int G(t, \sqrt{1-t^2})dt\,, \quad \textbf{c)} \int G(t, \sqrt{1+t^2})dt$$

donde G es una función racional de dos variables.

Los cambios de variable respectivos

$$\textbf{a)}\ x = \sec u\,, \quad \textbf{b)}\ x = \operatorname{sen} u\,, \quad \textbf{c)}\ x = \operatorname{tg} u$$

convierten las integrales anteriores en otras de la forma $\int F(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$ donde F es una función racional de dos variables.

Alternativamente, en el caso **a)** puede hacerse también $x = \cosh u$, y en el caso **c)** $x = \operatorname{senh} u$, lo que transforma dichas integrales en otras del tipo $\int T(\mathrm{e}^x)\,dx$ donde T es una función racional de una variable, que ya han sido estudiadas.

Nos queda por explicar cómo se hace el primer cambio de variable.

• Si el trinomio $h(x) = ax^2 + bx + c$ tiene dos raíces reales $\alpha < \beta$, lo que se hace es transformar dicho trinomio en otro que tenga como raíces -1 y 1. Para ello llevamos -1 a α y 1 a β mediante una función de la forma $\varphi(t) = \lambda t + \mu$. Las condiciones $\varphi(-1) = \alpha$, $\varphi(1) = \beta$, determinan que $\lambda = \dfrac{\beta - \alpha}{2}$, $\mu = \dfrac{\beta + \alpha}{2}$. Con el cambio

$$x = \varphi(t) = \frac{\beta - \alpha}{2} t + \frac{\beta + \alpha}{2}$$

tenemos que $h(\varphi(t)) = a\dfrac{(\beta - \alpha)^2}{4}(t^2 - 1)$. Ahora, si $a > 0$, deducimos que

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx = [x = \varphi(t)] = \int R\left(\varphi(t), \sqrt{a}\,\frac{(\beta - \alpha)}{2}\sqrt{t^2 - 1}\right)\frac{\beta - \alpha}{2}\,dt$$

que es del tipo **a)** anterior. Si $a < 0$, entonces

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx = [x = \varphi(t)] = \int R\left(\varphi(t), \sqrt{-a}\,\frac{(\beta - \alpha)}{2}\sqrt{1 - t^2}\right)\frac{\beta - \alpha}{2}\,dt$$

que es del tipo **b)** anterior.

• Si el trinomio ax^2+bx+c no tiene raíces reales, entonces debe ser $d=4ac-b^2>0$ y también $a>0$. Poniendo $\gamma=\dfrac{\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}$, podemos escribir:

$$ax^2+bx+c=\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}=\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+\gamma^2=$$
$$=\gamma^2\left[\left(\frac{\sqrt{a}}{\gamma}x+\frac{b}{2\sqrt{a}\gamma}\right)^2+1\right]=\gamma^2\left[\left(\frac{2a}{\sqrt{d}}x+\frac{b}{\sqrt{d}}\right)^2+1\right]$$

El cambio

$$\frac{2a}{\sqrt{d}}x+\frac{b}{\sqrt{d}}=t\,,\ \text{esto es}\ ,\ x=\frac{\sqrt{d}\,t-b}{2a}=\phi(t)$$

transforma la integral en

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx=[x=\phi(t)]=\int R\big(\phi(t),\gamma\sqrt{t^2+1}\big)\frac{\sqrt{d}}{2a}\,dt$$

que es del tipo **c)** anterior.

Casos particulares

• Las integrales de la forma $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ donde $P(x)$ es una función polinómica pueden resolverse con facilidad por el *método de reducción*. Se procede de la siguiente forma.

Escribimos

$$\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{d}{dx}\left(Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\right) + \frac{C}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

donde $Q(x)$ es un polinomio, cuyos coeficientes hay que calcular, de grado una unidad menos que el polinomio $P(x)$ y C es una constante que también hay que calcular. Observa que la igualdad anterior puede escribirse

$$P(x) = Q'(x)(ax^2+bx+c) + \frac{1}{2}Q(x)(2ax+b) + C$$

y a la derecha queda un polinomio de igual grado que $P(x)$ lo que permite identificar coeficientes. Una vez calculados el polinomio Q y la constante C tenemos que

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + C\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

con lo que todo se reduce a calcular una integral de la forma $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$.
Haciendo uso de los cambios antes visto, esta integral, salvo constantes, puede escribirse de alguna de las formas

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \operatorname{arc\,sen}(t)\,, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \operatorname{argsenh}(t)\,, \quad \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt = \operatorname{argcosh}(t)$$

Recuerda que $\operatorname{argsenh}(t) = \log\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)$ y $\operatorname{argcosh}(t) = \log\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)$.

- Finalmente, las integrales de la forma

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^k \sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx$$

se reducen a las del tipo anterior con el cambio $x - \alpha = \dfrac{1}{t}$.